

חדו"א א

פרק 6 - הגדרת הנזורת - גזירות של פונקציה - נזורות חד-צדדיות

תוכן העניינים

1	. הגדרת הנזורת וגזירות של פונקציה
8	. נזורות חד צדדיות

הגדרת הנגזרת, גזירות של פונקציה

שימוש לב

בפרק זה יש לדעת גזירות פונקציות לפי נוסחאות גזירה, כפי שנלמד בבית הספר. למי שלא למד זו את כדי לעبور קודם לפפרק הבא, למדוד את הנושא, ורק אחר כך לחזור לאן.

שאלות*

בשאלות 1-6 חשבו את הנגזרת של הפונקציה הנתונה על פי ההגדרה :

$$f(x) = \sin 4x \quad (3) \qquad f(x) = \frac{1}{x+1} \quad (2) \qquad f(x) = x^2 + 4x + 1 \quad (1)$$

$$f(x) = \sqrt{x+10} \quad (6) \qquad f(x) = \ln x \quad (5) \qquad f(x) = e^x \quad (4)$$

7) חשבו את $f'(0)$, אם נתון כי $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-44)$

8) חשבו את $f'(0)$, אם נתון כי $f(x) = 2x(|x|+1)\sqrt{1+x+x^2}$

9) חשבו את $f'(0)$, אם נתון כי $f(x) = x \cdot z(x)$ כאשר $z(0) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} z(x) = 4$

10) נתונה הפונקציה : $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-1} & x > 0 \\ -(x+1)^2 & x \leq 0 \end{cases}$

א. מצאו את כל הנקודות בהן הפונקציה רציפה.

ב. בדקו על פי הגדרת הנגזרת האם הפונקציה הנתונה גזירה בנקודה $x=1$. האם קיים משיק בנקודה זו ?

11) נתונה הפונקציה : $f(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ (n טבעי).

א. עבור אילו ערכים של n הפונקציה גזירה בנקודה $x=0$?

ב. עבור אילו ערכים של n הפונקציה גזירה ברציפות בנקודה $x=0$?

* בפרק זה חל איסור להשתמש בכלל לפיטול.

$$12) \text{ נתונה הפונקציה: } f(x) = \begin{cases} x^n \arctan \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad (n \text{ טבעי}).$$

- א. עבור אילו ערכים של n הפונקציה גזירה בנקודה $x=0$?
 ב. עבור אילו ערכים של n הפונקציה גזירה ברכיפות בנקודה $x=0$?

13) חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1+x} - e}{x} \quad \text{ב.} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(4+x) - \ln 4}{x} \quad \text{א.}$$

14) נתון כי f גזירה בנקודה x_0 . הוכיח כי :

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} . \quad \text{א.}$$

$$2x_0 f(x_0) - x_0^2 f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 f(x_0) - x_0^2 f(x)}{x - x_0} . \quad \text{ב.}$$

15) נתון כי f גזירה וזוגית. הוכיחו כי f' אי-זוגית.

16) נתונה פונקציה המוגדרת ב- $[a, b]$ ומקיים לכל $y, x \in [a, b]$:

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2$$

הוכיחו כי f גזירה ב- $[a, b]$ וחשבו את נגזרתה.

$$17) \text{ נתונה הפונקציה: } f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{Q} \\ x^3 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

חשבו את $(x)'$ על פי ההגדרה.

$$18) \text{ נתונה הפונקציה: } f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

חשבו את $(x)'$ על פי ההגדרה.

$$19) \text{ נתונה הפונקציה: } f(x) = |\sin^5 x|$$

א. חשבו את $(x)'$.

ב. מצאו את כל הנקודות עבורן $f'(x) = 0$

* בפרק זה חל איסור להשתמש בכלל לפיטול.

(20) הוכיחו או הפריכו :

- אם h גזירה ב- x_0 ו- g אינה גזירה ב- x_0 , אז $f = g + h$ אינה גזירה ב- x_0 .
- אם h אינה גזירה ב- x_0 ו- g אינה גזירה ב- x_0 , אז $f = g + h$ אינה גזירה ב- x_0 .
- אם h אינה גזירה ב- x_0 ו- g אינה גזירה ב- x_0 , אז $h \cdot g = f$ אינה גזירה ב- x_0 .
- אם h גזירה ב- x_0 ו- g אינה גזירה ב- x_0 , אז $h \cdot g = f$ אינה גזירה ב- x_0 .

(21) הוכיחו או הפריכו :

- $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right] = f'(x)$, אז f גזירה.
- אם הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right]$ קיים וסופי, אז f גזירה.

(22) הוכיחו או הפריכו :

- אם f גזירה ב- (a, b) ו- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = \infty$.
- אם f גזירה ב- (a, b) ו- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = \infty$.

(23) נתון כי $f(x)$ רציפה ב- $x = 4$, ומקיימת $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - \pi - 10(x-4)}{x-4} = 0$.
הוכיחו ש- f גזירה ב- $x = 4$, וחשבו את $f'(4)$.

(24) תהי f פונקציה רציפה בסביבת הנקודה $x = 0$ המקיים $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$.
הוכיחו כי $f(0) = 0$.

א. הוכיחו כי $f'(0) = 0$.

ב. הוכיחו כי f גזירה ב- $x = 0$ ו- $f'(0) = 0$.

(25) תהי f פונקציה גזירה על כל הישר, ונתון כי $f'(0) = k$ ו- $f(0) = 0$.

הוכיחו כי $\lim_{x \rightarrow \infty} x f\left(\frac{1}{x}\right) = k$.

(26) תהי $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: פונקציה גזירה בנקודה x_0 .

- אם $f(x_0) \neq 0$, הוכיחו שגם $|f|$ גזירה ב- x_0 .
- אם $f(x_0) = 0$, הראו שיתכן כי $|f|$ גזירה ב- x_0 וייתכן שלא.

27) תהיינה $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציות גזירות בנקודה x_0 .

נגידיר $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ לכל $x \in \mathbb{R}$.

הראו שאם $f(x_0) \neq g(x_0)$, אז h גזירה ב- x_0 .

28) תהי f פונקציה זוגית ב- \mathbb{R} .

. הוכיחו כי אם f גזירה ב- 0, אז $f'(0) = 0$.

הערה: פתרו בשתי דרכי שונות.

29) נתונה פונקציה $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ המקיים $f(xy) = f(x) + f(y)$ לכל $x, y \in (0, \infty)$.

נתון כי f גזירה בנקודה $x = 1$.

$$\text{א. הוכיחו כי } f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y) \text{ ו- } f(1) = 0.$$

$$\text{ב. הראו כי } f \text{ גזירה, ושלכל } x > 0, f'(x) = \frac{f'(1)}{x}.$$

30) נתון כי f פונקציה גזירה המקיים $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}$

הוכיחו ש- f פונקציה לינארית.

31) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו את הטענה הבאה:

$$f'(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_0 + a_n) - f(x_0)}{a_n} \text{ אם } f \text{ גזירה ב- } x_0, \text{ אז}$$

לכל סדרה $a_n \rightarrow 0$.

ב. תהי $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה בנקודה $x_0 = 1$ ו- $f(1) = 1$.

הראו שאם $k \in \mathbb{N}$, אז

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[(f(1 + \frac{1}{n}) + f(1 + \frac{2}{n}) + \dots + f(1 + \frac{k}{n})) - k \right] = \frac{k(k+1)}{2} f'(1)$$

$$\text{ג. חשבו את הגבול} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \dots + e^{\frac{10}{n}} - 10 \right]$$

(32) ענו על הסעיפים הבאים :

א. הוכחו שפונקציית דיריכלה $D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ לא גזירה בכל מקום.

ב. הוכחו שהפונקציה $f(x) = (x-1)^2 D(x)$ גזירה רק בנקודה $x=1$.

(33) פונקציה $f(x)$ מקיימת $|f(x)| \leq x^2$ לכל x .

הוכחו שהפונקציה גזירה ב-0.

(34) פונקציה $f(x)$ מקיימת $|f(x)| \leq \sin^2 x$ לכל x .

הוכחו שהפונקציה גזירה באינסוף נקודות שונות.

(35) תהי f פונקציה גזירה ב- x_0 .

א. הוכחו כי $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$

ב. תנו דוגמה של פונקציה רציפה f , באופן שהגבול בסעיף א' קיים, אך $(x_0)' f$ אינו קיים.

ג. הביעו באמצעות $(x_0)' f$ את הגבול $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 2h) - f(x_0 + 3h)}{h}$

(36) תהי f פונקציה גזירה פעמיים ב- x_0 .

א. הוכחו כי $f''(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2}$

ב. תנו דוגמה של פונקציה f , באופן שהגבול בסעיף א' קיים, אך $(x_0)'' f$ אינו קיים.

הערה: פתרו את סעיף א' רק אחרי למידת הנושא 'כלל לפיטל'.

(37) נתון כי $f(x) = (x-a)f(x)$ רציפה בנקודה $x=a$, ונגידר פונקציה חדשה $z(x) = f(x)$.
הוכחו או הפריכו :

א. הפונקציה z גזירה בנקודה $x=a$.

ב. $(x)' z$ רציפה ב- $x=a$.

תשובות סופיות

$$f'(x) = 4 \cos 4x \quad (3)$$

$$f(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} \quad (2)$$

$$f'(x) = 2x + 4 \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+10}} \quad (6)$$

4 (9)

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad (5)$$

2 (8)

$$f'(x) = e^x \quad (4)$$

!44 (7)

ב. לא גזירה בנקודה $x=1$. קיימש מישיק א נכי בנקודה.

א. רציפה לכל x .

נ. $n > 2$ ב. $n > 1$ (11)

נ. $n > 1$ ב. $n > 1$ (12)

$$e^{\frac{1}{4}} \text{ א. } (13)$$

(14) שאלת הוכחה.

(15) שאלת הוכחה.

(16) שאלת הוכחה.

(17) הפונקציה גזירה רק ב- $x=0$, ומתקיים: $f'(0) = 0$

(18) הפונקציה גזירה רק ב- $x=-1$, ומתקיים: $f'(-1) = 0$

$$x = \frac{\pi}{2}n \quad \text{ב.}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 5\sin^4 x \cos x & 2n\pi < x < (2n+1)\pi \\ 0 & x = n\pi \\ -5\sin^4 x \cos x & (2n+1)\pi < x < (2n+2)\pi \end{cases} \quad \text{א. (19)}$$

(20) שאלת הוכחה.

(21) שאלת הוכחה.

(22) שאלת הוכחה.

(23) שאלת הוכחה.

(24) שאלת הוכחה.

(25) שאלת הוכחה.

(26) שאלת הוכחה.

(27) שאלת הוכחה.

(28) שאלת הוכחה.

(29) שאלת הוכחה.

(30) שאלת הוכחה.

(31) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. 55

(32) שאלת הוכחה.

(33) שאלת הוכחה.

(34) שאלת הוכחה.

(35) א. שאלת הוכחה. ב. $f(x) = |x|$

$$f(x) = \text{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

(36) א. שאלת הוכחה. ב.

(37) שאלת הוכחה.

לפתרונות מלאים בוואידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

נגזרות חד-צדדיות

שאלות

1) תארו שתי דרכי שוניות לבדיקת גזירות של פונקציה מפוצלת בנקודות התפר שלה (נקודה שבה מתחלפת נוסחת הפונקציה).

השתמשו בפונקציה $f(x) = \begin{cases} x^2 + 8x & x \geq 2 \\ x^3 + 12 & x < 2 \end{cases}$ על מנת להציג שתי שיטות אלה.
בנוסף, הסבירו מתי יש להשתמש בכל אחת משיטות אלה.

בשאלות **2-9** בדקו את גזירות הפונקציות בתחום הגדרתן, בכל דרך שתבחרו.
בנוסף, רשמו נוסחה עבור הנגזרת של כל אחת מהפונקציות.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x & x \geq 2 \\ x^3 - 14 & x < 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x & x \geq 2 \\ x^3 - 14 & x < 2 \end{cases} \quad (2)$$

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1+2x) & -0.5 < x < 0 \\ x^2 + 2x & x \geq 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 8x & x \geq 2 \\ x^3 + 12 & x < 2 \end{cases} \quad (4)$$

$$f(x) = 3x^2 + x|x| + 1 \quad (7)$$

$$f(x) = 2 + 4|x - 1| \quad (6)$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (9)$$

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (8)$$

10) בדקו האם הפונקציה משאלת **5** גזירה פעמיים בנקודה $x = 0$.

$$\text{נתונה הפונקציה } f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x+1} & x \geq -1 \\ \frac{1}{x} + a & x < -1 \end{cases} \quad (11)$$

א. עבור איזה ערך של הקבוע a הפונקציה רציפה בנקודה $x = -1$?

ב. עבור ערך ה- a שקיבלת בסעיף א', בדקו על פי הגדרת הנגזרת האם הפונקציה הנתונה גזירה בנקודה $x = -1$.
האם קיימים מושיק בנקודה זו?

* בפרק זה חל איסור להשתמש בכלל לפיטול.

תשובות סופיות

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+8 & x \geq 2 \\ 3x^2 & x < 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-4 & x > 2 \\ 3x^2 & x < 2 \end{cases} \quad (2)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-5 & x > 2 \\ 3x^2 & x < 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+8 & x \geq 2 \\ 3x^2 & x < 2 \end{cases} \quad (4)$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{1+2x} & -0.5 < x < 0 \\ 2x+2 & x \geq 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$f'(x) = 4(x > 1), \quad f'(x) = -4(x < 1) \quad (6)$$

$$f'(x) = 8x(x \geq 0), \quad f'(x) = 4x(x < 0) \quad (7)$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (8)$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (9)$$

(10) לא גזירה פעמיים בנקודת $x=0$.

ב. לא גזירה. לא קיים משיק. $a=1$. **א.**

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{3}{x} \ln^2 x & 0 < x < e \\ \frac{3}{e} & x \geq e \end{cases} \quad a = 3/e \quad b = -2 \quad (12)$$

$$f'(x) = \begin{cases} e^x & 0 < x < 1 \\ e & x \geq 1 \end{cases} \quad a = e \quad b = 0 \quad (13)$$

$q=0, p=4$. **ב.** $q=0$. **א.** **(14)**

-10 **(15)**

(16) שאלת הוכחה.

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \mathbb{Z} \\ \text{undefined} & x \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (17)$$

$$f'(x) = \begin{cases} [x]\cos(\pi x)\pi & x \notin \mathbb{Z} \\ \text{undefined} & x \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (18)$$

$$f'(x) = \begin{cases} [x]\sin \pi x & x \notin \mathbb{Z} \\ 0 & x \in \mathbb{Z}, x \text{ even} \\ \text{undefined} & x \in \mathbb{Z}, x \text{ odd} \end{cases} \quad (19)$$

לפתרונות מלאים בווידאו של שאלות 20-23 היכנסו לאתר www.GooL.co.il

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & -1 < x \leq 0 \\ \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) & 0 < x < \frac{3\pi}{4} \end{cases} \quad \text{ב. } x \neq 1$$

(24) א. רציפה לכל x וגזירה לכל $x \neq 1$.